ВСОШ ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
РЕСПУБЛИКА МОРДОВИЯ

ЗАДАЧИ, РЕШЕНИЯ, МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРОВЕДЕНИЮ II (МУНИЦИПАЛЬНОГО) ЭТАПА

2021

Оргкомитету и жюри муниципального этапа

математической олимпиады школьников

Уважаемые коллеги!

Система оценки решений задач традиционная, уже много лет применяющаяся на математической олимпиаде: каждая задача, независимо от ее трудности, оценивается из 7 баллов и *каждая оценка должна быть целым числом, не меньшим 0 и не большим 7*. **Напоминаем, что при оценке решения по такой системе сначала дается ответ на принципиальный вопрос: верное оно (хотя, может быть, и с различными недостатками) или неверное (хотя, может быть, и с существенным продвижением).** В первом случае оценка должна быть *не ниже 4*, во втором - *не выше 3*.

В начале олимпиады напомните участникам, что нужно не только приводить ответы, но и *обосновывать* их (в этом, по существу, и состоит решение задачи, а ответ – лишь его результат).

Продолжительность олимпиады составляет для 7-11 классов 3 часа 55 минут, *не считая времени, потраченного на заполнение титульных листов работ и разъяснение условий задач.*

После проверки необходимо обязательно провести показ работ, на котором каждый участник должен иметь возможность ознакомиться с результатами проверки своей работы. Время и место проведения показа работ необходимо объявить участникам заранее.

Просим вас провести *разбор задач для участников олимпиады.* Желательно сделать это *в день олимпиады*. *Помните, что* ***олимпиада по математике*** *– это не только соревнование, но и* ***способ приобщения школьников к красивой и удивительной науке, МАТЕМАТИКЕ***.

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕРКЕ И ОЦЕНКЕ ОЛИМПИАДНЫХ РАБОТ

1. ***Решение каждой задачи оценивается из 7 баллов.*** *Жюри не имеет права изменять цену задачи.* В случаях, не предусмотренных прямо дополнительными указаниями по проверке и оценке задачи (их можно найти после решений задач для каждой из параллелей), её решение оценивается по следующим общим правилам:

Баллы	*Правильность (ошибочность) решения*
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Решение считается *неполным* в следующих случаях:

- если оно содержит основные нужные идеи, но не доведено до конца;
- если оно при верной общей схеме рассуждений содержит пробелы, т.е. явно или скрыто опирается на недоказанные утверждения, которые нельзя счесть известными или очевидными;
- если оно требует разбора нескольких возможных случаев, большая часть которых разобрана, но некоторые упущены.

При расхождении между общими и дополнительными указаниями применяются дополнительные.

2. При оценке решений на олимпиаде учитываются *только их правильность, полнота, обоснованность, идейность и оригинальность*. Нельзя снижать оценку за "нерациональность" решения (кроме отдельных редких случаев, когда такое прямо предусмотрено дополнительными указаниями по проверке данной задачи). ***Ни при каких обстоятельствах нельзя снижать оценку за нетиповое оформление решения, исправления, помарки и т.п.***

3. Оценивая олимпиадные работы, следует отличать принципиальные (прежде всего – логические) ошибки от технических, каковыми являются, например, арифметические ошибки в *геометрической или алгебраической* задаче (алгебраические ошибки в *вычислительной* задаче часто являются принципиальными). Технические ошибки, не искажающие логику решения, следует приравнивать к недочётам.

4. Нужно постоянно ориентировать школьников на необходимость обоснования решений. Но при этом не следует требовать большего уровня строгости, чем принято в обычной школьной практике для соответствующего класса. Умение хорошо изложить решение надо поощрять, но умение хорошо *догадываться* на олимпиаде всё же должно цениться выше.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 7 КЛАССА.

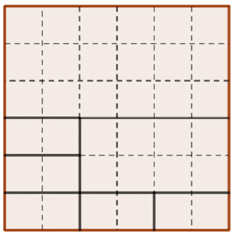
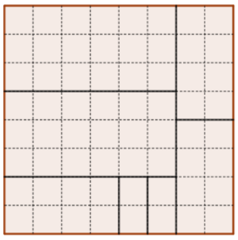
7.1. Замените буквы цифрами (все цифры должны быть разными) так, чтобы получилось верное равенство

$C:A:T + D:O:G + B:I:R:D = 1.$

Ответ. Например, $2:4:1 + 9:3:6 + 0:5:7:9 = 1$. Могут быть и другие примеры.
Комментарий. Разным буквам соответствуют разные цифры. Одинаковым – одинаковые.

7.2. Ольга Валерьевна попросила семиклассников разрезать квадрат ровно на семь прямоугольников (не обязательно разных), у каждого из которых одна сторона в два раза больше другой. Выполнимо ли это задание?

Ответ. Да.
Решение. На рисунках приведены два примера как это сделать.

7.3. Конечная последовательность чисел обладает свойствами: а) сумма любых двух последовательных членов отрицательна; б) сумма любых трёх последовательных членов положительна.
Какое наибольшее количество членов в ней может быть?

Ответ. 3.
Решение.
Пример. $2,\ -3,\ 2$.
Оценка. Предположим, что в последовательности не менее 4 членов. Пусть x – любой член этой последовательности. С одной из сторон от этого члена находятся два других элемента этой последовательности. Действительно, если с обеих сторон было бы не более, чем по одному элементу последовательности, тогда в последовательности всего было бы не более 3 членов, а их по предположению не менее 4. Обозначим эти два члена последовательности через a и b. Так как, по условию $x + a + b > 0$, а $a + b < 0$, то $x > 0$. Выходит, что все элементы этой последовательности должны быть положительны. Но это противоречит тому, что сумма любых двух членов отрицательна.

7.4. На острове Трёхкупюрном у аборигенов в ходу купюры только трёх номиналов – x тугриков, $x + 1$ тугриков и $x + 2$ тугриков. Этими купюрами можно оплатить без сдачи любую покупку дороже 31 тугрика, а покупку в 31 тугрик – нельзя. Каковы номиналы купюр?

Ответ. **8, 9, 10.**
Решение.
Оценка. Трех купюр даже по 10 тугриков не хватит для суммы в 31 тугрик, а четырех купюр даже по 8 тугриков много. Значит, этими номиналами сумму в 31 тугрик получить нельзя.

Пример.

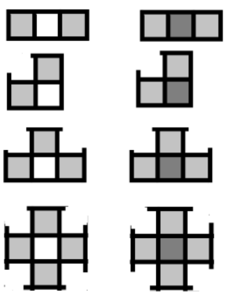
Сумма	По 8	По 9	По 10
32	4		
33	3	1	
34	3		1
35	2	1	1
36	1	2	1
37	1	1	2
38		2	2
39		1	3
40	5		
41	4	1	

Добавляя к этим наборам купюр необходимое количество купюр по 10 тугриков, очевидно можно получить любую сумму, большую 31.
Например, чтобы получить 102 тугрика можно взять набор купюр для 32 тугриков и 7 купюр по 10 тугриков.

7.5. Тёмный Лорд заразил коронавирусом 9 клеток поля 10×10. На следующий день новая клетка поражается коронавирусом, если у неё есть две соседних поражённых клетки. Соседними называются клетки, имеющие общую сторону. Гермиона не переживает, потому что считает, что всё поле никогда не будет поражено коронавирусом. Оправдан ли её оптимизм?

Ответ. Да. Оптимизм оправдан. Поле полностью не будет поражено.

Решение.



Заметим, что в процессе поражения новых клеток коронавирусом общий периметр части поля из зараженных клеток не увеличивается. Так происходит потому, что у новой клетки две общих стороны с уже зараженными клетками оказываются внутри. Так как у старых зараженных клеток они пропадают, а новых сторон у вновь появившихся зараженных клеток появляется не более чем $4-2=2$ штук. На рисунках приведены все возможные случаи. На первых двух периметр сохраняется. На третьем уменьшается на $3-1=2$, на четвёртом уменьшается на 4. Заметим, что максимальный периметр 9 клеток равен $4 \cdot 9 = 36$. А периметр всего поля равен $4 \cdot 10 = 40$. Раз 36 могло только уменьшаться, то стать равным 40 периметр не может.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕРКЕ И ОЦЕНКЕ.

7.1. За верный пример – *7 баллов*, приведено несколько примеров, среди которых есть как верный, так и неверные – *4 балла,* верный пример не приведен – *0 баллов.*

7.2. За верный пример – 7 баллов, приведено несколько примеров, среди которых есть как верный, так и неверные – *4 балла*, верный пример не приведен – *0 баллов.*

7.3. За верный пример – *2 балла.* Оценка – *4 балла.*

7.4. За верный пример – *3 балла.* Оценка – *3 балла.*

7.5. За правильный ответ без обоснования – *0 баллов*. Замечено, что в процессе поражения новых клеток коронавирусом общий периметр части поля из зараженных клеток не увеличивается – 2 *балла*.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 8 КЛАССА.

8.1. При помощи скобок и знаков арифметических действий сделайте из числа 5234567 выражение, равное 2021 *(цифры местами не менять).*

Ответ. Например, $5-(2-34)\cdot(56+7)=5+2016=2021$ или
$(-5-2+345)\cdot 6-7=2028-7=2021.$

8.2. Числа a, b и c удовлетворяют условиям $a+b-c=2$ и $2ab-c^2=4$. Докажите, что $a=b=c$.

Доказательство: Выразим из первого равенства c и подставим во второе, получим $2ab-c^2=2ab-(a+b-2)^2=2ab-a^2-b^2-4-2ab+4a+4b=4$,
что равносильно $a^2+b^2-4a-4b+8=(a-2)^2+(b-2)^2=0$, откуда $a=b=2$. Подставив в первое равенство, найдём, что $c=2$, т.е. $a=b=c$, что и требовалось доказать.

8.3. Конечная последовательность обладает свойствами:
а) сумма любых трёх последовательных членов отрицательна; б) сумма любых пяти последовательных членов положительна.
Какое наибольшее количество членов в ней может быть?

Ответ. 6.

Решение.

Пример. $-3,\ 5,\ -3,\ -3,\ 5,\ -3$.
Сумма любой тройки соседних элементов равна -1.
Сумма любой пятёрки соседних элементов равна 1.

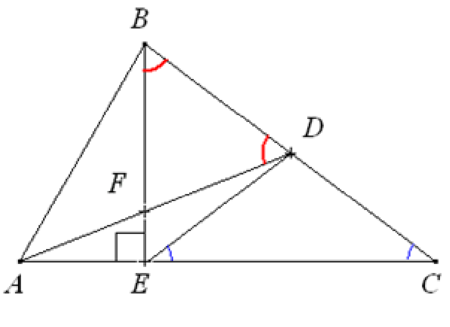
Оценка. Предположим, что в последовательности не менее 7 членов.

Пусть x и y – любые два последовательных члена этой последовательности. С одной из сторон от них находятся три элемента этой последовательности. Действительно, если с обеих сторон было бы не более чем по два элемента последовательности, тогда их всего было бы не более, чем $2+2+2=6$, а их по предположению не менее 7.

Обозначим три этих элемента последовательности через a, b и c.
Так как по условию $x+y+a+b+c>0$, а $a+b+c<0$, то $x+y>0$. Выходит, что сумма любых двух соседних членов этой последовательности должна быть положительна.
Рассмотрим сумму 6 первых членов последовательности
$S=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$.
С одной стороны, так как сумма любой пары соседних элементов положительна, то
$S=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+(a_5+a_6)>0$.
С другой стороны, так как сумма любой тройки соседних элементов отрицательна, то
$S=(a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6)<0$.
Противоречие.

8.4. Медиана AD и высота BE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке F. Известно, что $BF=FD$. Докажите, что $\angle C>30^\circ$.

Доказательство:



ED – медиана к гипотенузе в треугольнике BCE, значит, $DE=DC$, $\angle DEC=\angle DCE=\alpha$.
В равнобедренном треугольнике BFD имеем
$\beta=\angle FBD=\angle FDB<\angle EDB=\angle DEC+\angle DCE=2\alpha$, но в прямоугольном треугольнике BCE сумма острых углов $\angle CBE+\angle BCE=90^\circ=\beta+\alpha<2\alpha+\alpha$, значит, $\angle C=\alpha>90^\circ/3=30^\circ$, что и требовалось доказать.

8.5. Планета Кубическая имеет форму куба со стороной 10. Некоторые кубики 1×1×1 этой планеты поражены коронавирусом. На следующий день ранее здоровый кубик поражается коронавирусом, если у него было не менее трёх соседних инфицированных кубиков. Соседними являются кубики, имеющие общую грань. Настанет ли момент, когда вся планета будет целиком поражена вирусом, если в начальный момент какие-то 99 кубиков были инфицированы коронавирусом?

Ответ. Нет.

Решение.

Здоровые кубики будем представлять себе белыми, а инфицированные чёрными. Рассмотрим, как меняется площадь поверхности всех чёрных кубиков, соединённых в общий кусок, в процессе заражения. Белый кубик на следующий день становится чёрным, если у него не менее трёх соседних по грани кубиков чёрные. В процессе заражения соседние грани соединяются и оказываются внутри чёрного куска и новых граней у этого чёрного куска появляется не более, чем $6 - 3 = 3$.

Итак, у чёрного куска не менее чем 3 грани (по условию) пропадает, оказываясь внутри и не более, чем 3 новых появляется снаружи. Следовательно, вся площадь поверхности чёрного куска или кусков, если их несколько, в процессе заражения не увеличивается.

Изначально площадь поверхности чёрных кусков не более чем $99 \cdot 6 = 594$.

А площадь поверхности всей планеты $6 \cdot 10 \cdot 10 = 600$.

Поэтому вся планета целиком никогда не окажется поражённой коронавирусом.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕРКЕ И ОЦЕНКЕ.

8.1. За верный пример – *7 баллов*, приведено несколько примеров, среди которых есть как верный, так и неверные – *4 балла*, верный пример не приведен – *0 баллов.*

8.2. Выразили из первого равенства c и подставили во второе– *2 балла*.

8.3. За верный пример – *2 балла.* Оценка – *4 балла.*

8.4. Показано, что треугольник DEC равнобедренный – *2 балла.*

8.5. За правильный ответ без обоснования – *0 баллов*. Замечено, что общая площадь поверхности из зараженных клеток не увеличивается– 2 *балла*.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 9 КЛАССА.

9.1. Квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 + 2021ax + b$ имеет целые корни, b – целое и нечётное. Может ли f (2021) быть нечётным?

Ответ. Нет.

Решение. Пусть x_1 и x_2 –корни $f(x)$. Тогда по теореме Виета $x_1 \cdot x_2 = b$. По условию b –нечётное, x_1 и x_2 целые. Отсюда следует x_1 и x_2 нечётные. По теореме Виета $x_1 + x_2 = -2021a$, тогда $2021a$ – целое и четное число. $f(2021) = 2021^2 + 2021^2 a + b$.
2021^2–нечётное, $2021^2 a$ – чётное, b – нечётное.
Следовательно, сумма чётное число.

9.2. Конечная последовательность чисел обладает свойствами: а) сумма любых трёх последовательных членов отрицательна; б) сумма любых семи последовательных членов положительна.
Какое наибольшее количество членов в ней может быть?

Ответ. 8.

Решение. **Пример.** $3,\ 3,\ -7,\ 3,\ 3,\ -7,\ 3,\ 3$. Возможны другие примеры.
Сумма любой тройки соседних элементов равна $3 + 3 - 7 = -1$.
Сумма любой семёрки соседних элементов равна $5 \cdot 3 + 2 \cdot (-7) = 1$.

Оценка. Предположим, что в последовательности не менее 9 членов.
Пусть a, b, c, d – любые четыре последовательных члена этой последовательности.
С одной из сторон от них находятся три члена этой последовательности. Действительно, если с обеих сторон было бы не более чем по два члена последовательности, тогда их всего было бы не более, чем $2 + 4 + 2 = 8$, а их по предположению не менее 9. Обозначим три этих члена последовательности через x, y, z.
Так как, по условию $a + b + c + d + x + y + z > 0$, а $x + y + z < 0$, то $a + b + c + d > 0$. Выходит, что сумма любых четырёх соседних членов этой последовательности должна быть положительна.
Пусть p – произвольный член последовательности. С одной из сторон от него находятся три других соседних члена. Обозначим их через u, v, w.
Так как $p + u + v + w > 0$, а $u + v + w < 0$, то $p > 0$.
Выходит, что все члены нашей последовательности положительны.
Это противоречит тому, что сумма некоторых из них отрицательна.

9.3. Для любых положительных чисел x_i доказать неравенство

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 < \frac{(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2}{4}.$$

Решение. Умножим неравенство на 4, раскроем скобки и перенесем все слагаемые в правую сторону неравенства, получим равносильное неравенство

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 < \frac{(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2}{4},$$

$$4x_1x_2 + 4x_2x_3 + 4x_3x_4 < (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2,$$

$$4x_1x_2 + 4x_2x_3 + 4x_3x_4 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 +$$
$$+ 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4,$$

$$0 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 -$$
$$- 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 - 2x_3x_4 = A.$$

Рассмотрим теперь правую часть неравенства, обозначим её A. Заметим, что в произведения, имеющие знак “$-$”, множители x_i входят только с индексами *разной* четности. Но не все такие слагаемые отрицательные – есть одно положительное слагаемое $2x_1x_4$!

Тогда, если в выражении A заменить знак с “+” на “$-$” у этого произведения $2x_1x_4$, то получим, что такая сумма B будет строго меньше A, поскольку числа x_1 и x_4 положительные. С другой стороны, эта сумма B неотрицательна, так как

$$A > B = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 -$$
$$-2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 - 2x_3x_4 =$$
$$= (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 \geq 0.$$

Возможно решение с использованием неравенства Коши.

9.4. Полина написала на доске несколько *разных* многочленов 3-ей степени так, что: 1) каждый многочлен имеет 3 различных действительных корня; 2) любые два написанных многочлена имеют ровно один общий корень; 3) для любого корня любого из многочленов число написанных многочленов, имеющих такой корень, есть величина постоянная. Какое наименьшее число многочленов могла написать на доске Полина?

***Ответ*. 4.**

Решение первое. Пусть число написанных на доске многочленов равно k. Пусть число написанных на доске многочленов и имеющих какой-то один общий корень $x = a$, равно l. Пусть число всех различных корней всех многочленов равно m.

Перемножим все написанные на доске многочлены 3-ей степени, тогда получим многочлен, который имеет корни всех написанных на доске многочленов и кратность каждого корня $x = a$ этого произведения равна l. С одной стороны, степень произведения многочленов равна $3 \cdot k$, так как перемножили k многочленов степени 3. С другой стороны, степень произведения многочленов равна $l \cdot m$, так как произведение многочленов имеет все m корней, каждый из которых имеет кратность l. Поэтому справедливо равенство

$$3 \cdot k = l \cdot m.$$

Так как многочленов несколько, то есть имеется по крайней мере два многочлена, и так как эти два многочлена имеют только один общий корень, то число различных корней всех многочленов не меньше $m \geq 5$. Но каждый из этих пяти различных корней является корнем по крайней мере двух многочленов, поскольку по условию для любого корня число написанных на доске многочленов, имеющих такой корень, есть величина постоянная, поэтому число многочленов, имеющих один и тот же общий корень $x = a$, не меньше $l \geq 2$. Поэтому степень произведения всех многочленов не меньше

$$l \cdot m \geq 2 \cdot 5 = 10.$$

С другой стороны, это число $l \cdot m = 3 \cdot k$ делится на 3. Поэтому оно не меньше 12, то есть

$$3 \cdot k = l \cdot m \geq 12,$$

откуда получаем, что $k \geq 4$.

Теперь покажем, что Полина могла написать на доске $k = 4$ таких многочлена, тогда при этом

$$3 \cdot k = 3 \cdot 4 = 12 = l \cdot m = 2 \cdot 6.$$

Действительно, подойдут такие четыре многочлена третьей степени (запишем их в виде произведений скобок первой степени):

$$p_1(x) = (x-a)(x-b)(x-c), \quad p_2(x) = (x-a)(x-d)(x-e),$$

$$p_3(x) = (x-b)(x-d)(x-f), \quad p_4(x) = (x-c)(x-e)(x-f).$$

Решение второе. Так как на доске написано несколько многочленов, то есть написано по крайней мере два многочлена, и так как эти два многочлена имеют только один общий корень, то число различных корней этих двух многочленов не меньше 5. Пусть, например, это такие многочлены (запишем их в виде произведений скобок первой степени):

$$p_1(x) = (x-a)(x-b)(x-c),\;\; p_2(x) = (x-a)(x-d)(x-e).$$

Так как число многочленов должно быть наименьшим, тогда корень $x=a$ не будет корнем никакого другого многочлена. Поэтому на доске написан какой-то третий многочлен, один корень которого совпадает с одним корнем первого многочлена, например, с корнем $x=b$, и другой корень которого совпадает с одним корнем второго многочлена, например, с корнем $x=d$, а третий корень не совпадает с корнями этих многочленов, то есть число различных корней не меньше 6. Пусть это многочлен

$$p_3(x) = (x-b)(x-d)(x-f).$$

Тогда корни $x=a$, $x=b$, $x=d$ не являются корнями никаких других многочленов, а для корней $x=c$, $x=e$, $x=f$ нужен как минимум ещё один четвертый многочлен. Например, подойдет многочлен

$$p_4(x) = (x-c)(x-e)(x-f).$$

Нетрудно видеть, что эти четыре многочлена подходят, поэтому наименьшее число многочленов равно $n=4$.

Решение третье. Пусть на доске написано несколько многочленов, так что любые два написанных многочлена имеют один общий корень и для каждого корня любого из многочленов число написанных многочленов, имеющих такой корень, есть величина постоянная, тогда эта величина не меньше числа 2. Пусть на доске написан какой-то многочлен

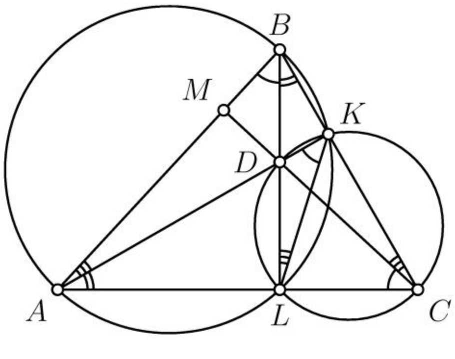
$$p_1(x) = (x-a)(x-b)(x-c),$$

тогда из этого следует, что на доске должны быть написаны также ещё не менее трёх многочленов такие, что первый из них имеет корень $x=a$, второй имеет корень $x=b$, а третий имеет корень $x=c$. Поэтому число многочленов не меньше $3+1=4$. Теперь покажем, что Полина могла написать на доске 4 таких многочлена. Действительно, подойдут такие четыре многочлена третьей степени (запишем их в виде произведений скобок первой степени):

$$p_1(x) = (x-a)(x-b)(x-c),\qquad p_2(x) = (x-a)(x-d)(x-e),$$
$$p_3(x) = (x-b)(x-d)(x-f),\qquad p_4(x) = (x-c)(x-e)(x-f).$$

9.5. Внутри разностороннего остроугольного треугольника ABC дана точка D такая, что $\angle DAC = \angle DBC$ и $\angle DCA = \angle DBA$. Доказать, что точка D является точкой пересечения высот треугольника ΔABC (или *ортоцентром* треугольника ΔABC).

Решение.



Пусть прямая AD пересекает BC в точке K, прямая BD пересекает AC в точке L, прямая CD пересекает AB в точке M (см. рисунок). Так как $\angle DAC = \angle DBC$, то есть $\angle KAL = \angle LBK$, поэтому точки A, B, K, L лежат на одной окружности ω_1. Тогда $\angle BAK = \frac{1}{2}\overset{\smile}{BK} = \angle BLK$ и $\angle ABL = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AL} = \angle AKL = \angle MCL$.

Поэтому $\angle DKL = \angle DCL$, поэтому точки D, K, C, L лежат на одной окружности ω_3. Тогда $\angle DCK = \frac{1}{2}\overset{\smile}{DK} = \angle DLK$, то есть $\angle BLK = \angle BAK = \angle MCB$.

Пусть $\angle ABL = \angle MCA = \alpha$, $\angle KAC = \angle LBC = \beta$, $\angle BAK = \angle MCB = \gamma$, тогда в треугольнике ΔABC имеем

$$\angle A + \angle B + \angle C = (\beta+\gamma)+(\alpha+\gamma)+(\alpha+\beta) = 2(\alpha+\beta+\gamma) = 180^\circ, \Rightarrow$$
$$\alpha+\beta+\gamma = 90^\circ.$$

Тогда получаем, что

$$\angle BLA = 180^\circ - \angle LAB - \angle ABL = 180^\circ - (\beta+\gamma) - \alpha = 90^\circ,$$

$$\angle CMB = 180^\circ - \angle MBC - \angle BCM = 180^\circ - (\alpha+\beta) - \gamma = 90^\circ,$$
$$\angle AKC = 180^\circ - \angle ACK - \angle CAK = 180^\circ - (\alpha+\gamma) - \beta = 90^\circ,$$

то есть отрезки AK, BL, CM являются высотами треугольника ΔABC, поэтому точка D является точкой пересечения высот или ортоцентром треугольника ΔABC.

Замечание. Можно было аналогично показать, что точки B, C, L, M лежат на одной окружности ω_2, и точки A, L, D, M лежат на одной окружности ω_4.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕРКЕ И ОЦЕНКЕ.

9.1. 1). Записано, что x_1 и x_2 нечётные – *2 балла.*
2). Записано, что $2021a$ – целое и четное число – *2 балла.*

9.2. За верный пример – *2 балла.* Оценка – *4 балла.*

9.3. 1). Имеется идея уменьшения суммы путём замены положительных слагаемых на отрицательные – *2 балла*.
2). Имеется идея рассмотрения квадратов вида $(a-b+c)^2$ или $(a-b+c-d)^2$ – *2 балла*.
3). Верно выписан в виде суммы квадрат $(x_1-x_2+x_3-x_4)^2$ – *3 балла*.
Любое *верное* решение неравенства оценивается в *7 баллов.*

9.4. Обоснована минимальность числа многочленов $n=4$ – *4 балла*. Записан верный набор из четырёх многочленов без обоснования минимальности – *3 балла*.

9.5. Баллы суммируются за продвижения.
1). Показано, что точки A, B, K, L (или точки B, C, L, M) лежат на одной окружности – *2 балла*.
2). Показано, что точки D, K, C, L (или точки A, L, D, M) лежат на одной окружности – ещё *2 балла*.
3). Показано, что $\angle BAK = \angle MCB$ – ещё *2 балла*.
4). Показано, что $\angle BLA = \angle CMB = \angle AKC = 90^\circ$ – ещё *1 балл*.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 10 КЛАССА.

10.1. Уравнение $g(x)=0$ имеет два корня, где $g(x)=x^2+2ax+b$. Сколько корней имеет уравнение $g(x)+m(x+a)^2=0$, если $m>0$?

Ответ. Два корня.

Решение.
Уравнение $x^2+2ax+b=0$, имеет два корня, поэтому $D>0$; $4a^2-4b>0, a^2-b>0$.
Вычислим дискриминант нового трёхчлена $g(x)+m(x+a)^2=0$. Имеем:

$$x^2+2ax+b+m(x+a)^2=0,$$
$$x^2+2ax+b+mx^2+2amx+ma^2=0,$$

$$(m+1)x^2+2a(m+1)x+(b+ma^2).$$

Значит, $\frac{D}{4}=a^2(m+1)^2-(m+1)(b+ma^2), (m+1)(a^2m+a^2-b-ma^2)=(m+1)(a^2-b)$, $a^2-b>0, m+1>0$, поскольку $m>0$. Получили, что дискриминант нового трёхчлена положителен, поэтому уравнение $g(x)+m(x+a)^2=0$ имеет два корня.

10.2. Найти целые положительные решения уравнения

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{\sqrt{4-n}+4}{\sqrt{4-n}+5}$$

Ответ. **4.**

Решение.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$
$$\frac{n}{n+1}=\frac{\sqrt{4-n}+4}{\sqrt{4-n}+5}.$$

По ОДЗ $n\le 4$, тогда подкоренное выражение рационально, если $n=3$ или $n=4$. Проверкой убеждаемся, что $n=4$.

10.3. Для любых положительных чисел x_i доказать неравенство

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_6+x_6x_7+x_7x_8<\frac{(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8)^2}{4}.$$

Решение. Умножим неравенство на 4, раскроем скобки и перенесем все слагаемые в правую сторону неравенства, получим равносильное неравенство

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_6+x_6x_7+x_7x_8<\frac{(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8)^2}{4},$$
$$4x_1x_2+4x_2x_3+4x_3x_4+4x_4x_5+4x_5x_6+4x_6x_7+4x_7x_8<(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8)^2,$$
$$4x_1x_2+4x_2x_3+4x_3x_4+4x_4x_5+4x_5x_6+4x_6x_7+4x_7x_8<x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2+$$
$$+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4+2x_1x_5+2x_1x_6+2x_1x_7+2x_1x_8+$$
$$+2x_2x_3+2x_2x_4+2x_2x_5+2x_2x_6+2x_2x_7+2x_2x_8+$$
$$+2x_3x_4+2x_3x_5+2x_3x_6+2x_3x_7+2x_3x_8+$$

$$+2x_4x_5+2x_4x_6+2x_4x_7+2x_4x_8+$$
$$+2x_5x_6+2x_5x_7+2x_5x_8+$$
$$+2x_6x_7+2x_6x_8+$$
$$+2x_7x_8,$$
$$0<x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2+$$
$$-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4+2x_1x_5+2x_1x_6+2x_1x_7+2x_1x_8-$$
$$-2x_2x_3+2x_2x_4+2x_2x_5+2x_2x_6+2x_2x_7+2x_2x_8-$$
$$-2x_3x_4+2x_3x_5+2x_3x_6+2x_3x_7+2x_3x_8-$$
$$-2x_4x_5+2x_4x_6+2x_4x_7+2x_4x_8-$$
$$-2x_5x_6+2x_5x_7+2x_5x_8-$$
$$-2x_6x_7+2x_6x_8-$$
$$-2x_7x_8=A.$$

Рассмотрим теперь правую часть неравенства, обозначим её A. Заметим, что в произведения, имеющие знак “–”, множители x_i входят только с индексами *разной* четности. Но не все такие слагаемые отрицательные!

Тогда, если в выражении A заменить знаки с “+” на “–” у всех остальных произведений, в которые входят x_i с индексами *разной* четности, то получим, что такая сумма B будет строго меньше A, поскольку все числа x_i положительные. С другой стороны, эта сумма B неотрицательна, так как

$$A>B=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2+$$
$$-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4+2x_1x_5-2x_1x_6+2x_1x_7-2x_1x_8-$$
$$-2x_2x_3+2x_2x_4-2x_2x_5+2x_2x_6-2x_2x_7+2x_2x_8-$$
$$-2x_3x_4+2x_3x_5-2x_3x_6+2x_3x_7-2x_3x_8-$$
$$-2x_4x_5+2x_4x_6-2x_4x_7+2x_4x_8-$$
$$-2x_5x_6+2x_5x_7-2x_5x_8-$$
$$-2x_6x_7+2x_6x_8-$$
$$-2x_7x_8=$$
$$=(x_1-x_2+x_3-x_4+x_5-x_6+x_7-x_8)^2\geq 0.$$

10.4. Паша написал на доске несколько *разных* многочленов 3-ей степени так, что: 1) каждый многочлен имеет 3 различных действительных корня; 2) любые два написанных многочлена имеют ровно один общий корень; 3) для любого корня любого из многочленов число написанных многочленов, имеющих такой корень, есть величина постоянная. Какое наибольшее число многочленов мог написать на доске Паша?

Ответ. **7.**

Решение. Пусть на доске написано несколько многочленов 3-ей степени так, что любые два написанных многочлена имеют один общий корень и для каждого корня любого из многочленов число написанных многочленов, имеющих такой корень, есть величина постоянная. Найдем наибольшее возможное значение этой величины. Покажем, что число написанных многочленов, имеющих какой-то один общий корень $x=a$, не больше 3.

Пусть *от противного* это не так, то есть число написанных многочленов, имеющих какой-то один общий корень $x=a$, не меньше 4, тогда на доске написаны по крайней мере 4 многочлена, имеющих корень $x=a$. Пусть, например, это многочлены (запишем их в виде произведений скобок первой степени):

$$p_1(x)=(x-a)(x-b)(x-c),\quad p_2(x)=(x-a)(x-d)(x-e),$$

$$p_3(x)=(x-a)(x-f)(x-g),\quad p_4(x)=(x-a)(x-h)(x-i).$$

Теперь рассмотрим какой-нибудь многочлен $q(x)$, не имеющий корень $x=a$, тогда по условию многочлен $q(x)$ должен иметь один из корней b и c, один из корней d и e, один из корней f и g, один из корней h и i. Но тогда степень многочлена $q(x)$ должна быть не меньше 4 – противоречие.

Пусть теперь число написанных многочленов, имеющих какой-то один общий корень $x=a$, максимально и равно $l=3$, и пусть это такие многочлены

$$p_1(x)=(x-a)(x-b)(x-c),\quad p_2(x)=(x-a)(x-d)(x-e),$$
$$p_3(x)=(x-a)(x-f)(x-g).$$

Так как остальные многочлены должны иметь ровно по одному совпадающему корню каждого из многочленов $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$, то число всех различных корней всех многочленов равно m числу различных корней многочленов $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$, то есть равно $m=7$.

Пусть число всех написанных на доске многочленов равно k. Перемножим все написанные на доске многочлены 3-ей степени, тогда получим многочлен, который имеет корни всех написанных на доске многочленов и кратность каждого корня этого произведения равна $l=3$. С одной стороны, степень произведения многочленов равна $3\cdot k$, так как перемножили k многочленов степени 3. С другой стороны, степень произведения многочленов равна

$$l\cdot m=3\cdot 7=21,$$

так как произведение многочленов имеет все $m=7$ корней, каждый из которых имеет кратность $l=3$. Поэтому справедливо равенство

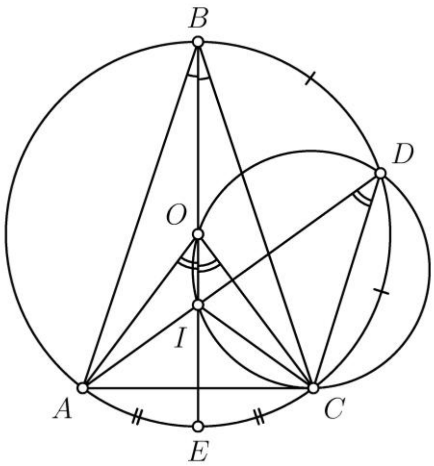
$$3\cdot k=l\cdot m=21,\Rightarrow k=7,$$

то есть число многочленов равно числу всех различных корней всех многочленов, то есть равно $k=m=7$. Это число многочленов максимально, поскольку максимально число написанных многочленов, имеющих какой-то один общий корень $x=a$. Примером может служить набор многочленов вида

$$p_1(x)=(x-a)(x-b)(x-c),\quad p_2(x)=(x-a)(x-d)(x-e),$$
$$p_3(x)=(x-a)(x-f)(x-g),\quad p_4(x)=(x-b)(x-d)(x-f),$$
$$p_5(x)=(x-b)(x-e)(x-g),\quad p_6(x)=(x-c)(x-d)(x-g),$$
$$p_7(x)=(x-c)(x-e)(x-f).$$

10.5. Дан остроугольный треугольник ABC ($\angle A\neq\angle B$). Пусть I – центр вписанной окружности, O – центр описанной окружности Ω треугольника ABC. Пусть окружность ω, описанная около треугольника IOC, пересекает окружность Ω в точке D – середине меньшей дуги BC. Доказать, что треугольник ABC – равнобедренный.

Решение.



Рассмотрим случай, когда точка O лежит дальше от стороны AC, чем точка I (другой случай рассматривается аналогично).

Проведем прямую AI до пересечения с описанной окружностью Ω, тогда она пересечёт Ω в точке D – середине меньшей дуги $\overset{\smile}{BC}$, поскольку I – центр вписанной окружности, то есть AI является биссектрисой угла $\angle A$.

Пусть угол $\angle ABC=2\alpha$, тогда в окружности Ω имеем $\angle ABC=\frac{1}{2}\overset{\smile}{AC}=\angle ADC=2\alpha$ и $\angle AOC=\overset{\smile}{AC}=4\alpha$. Но тогда в окружности ω имеем $\angle IDC=\frac{1}{2}\overset{\smile}{IC}=\angle IOC=2\alpha$. Поэтому и угол $\angle AOI$ также равен $\angle AOI=\angle AOC-\angle IOC=4\alpha-2\alpha=2\alpha$.

Следовательно, отрезок OI лежит на биссектрисе центрального угла $\angle AOC$, то есть прямая OI пересекает окружность Ω в середине E меньшей дуги $\overset{\smile}{AC}$, то есть точки O, I, E лежат на одной прямой.

С другой стороны, отрезок BI лежит на биссектрисе угла $\angle ABC$, поэтому прямая OI также пересекает окружность Ω в середине E меньшей дуги $\overset{\smile}{AC}$, то есть точки O, I, E лежат на одной прямой.

Поэтому четыре точки B, O, I, E лежат на одной прямой BE. Эта прямая прямая содержит биссектрису OM равнобедренного треугольника AOC, поэтому эта прямая BE является серединным перпендикуряром к отвезку AC, откуда следует, что $AB = BC$, то есть треугольник ΔABC – равнобедренный.

Замечание. Случай, когда точка O лежит ближе к стороне AC, чем точка I, отличается от рассмотренного только порядком букв точек.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕРКЕ И ОЦЕНКЕ.

10.1. Записан дискриминант уравнения $g(x) = 0$ – *2 балла*.

10.2. Получены ограничения на n – *2 балла*. Преобразована левая часть уравнения – 3 *балла*. Ответы без обоснования не засчитываются.

10.3. 1). Имеется идея уменьшения суммы путём замены положительных слагаемых на отрицательные – *2 балла*.

2). Имеется идея рассмотрения квадратов вида $(a-b+c)^2$, $(a-b+c-d)^2$ и аналогичных – *2 балла*.

3). Верно выписан в виде суммы квадрат $(x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 + x_7 - x_8)^2$ – *3 балла*.

Любое *верное* решение неравенства оценивается в *7 баллов*.

10.4. 1). Обоснована максимальность числа многочленов $k = 7$ – *4 балла*. 2).Записан верный набор из 7 многочленов без обоснования максимальности – *3 балла*.

10.5. Баллы суммируются за продвижения.

1). Показано, что $\angle AOC = 2\angle ABC$ – *1 балл*.

2). Показано, что $\angle ABC = \angle ADC$ – *1 балл*.

3). Показано, что $\angle IOC = \angle IDC$ – *1 балл*.

3). Показано, что OI лежит на биссектрисе угла $\angle AOC$ (или OI перпендикулярно AC) – *1 балл*.

4). Показано, что точка B лежит на прямой OI – *3 балла*.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 11 КЛАССА.

11.1. Решить уравнение

$$4(x+1)^3+6x^2(x-1)+4=0.$$

Ответ. $x=-\frac{2}{\sqrt[3]{9}+1}$.

Решение. Раскроем скобки, получим

$$4(x^3+3x^2+3x+1)+6x^2(x-1)+4=0,$$

$$4(x^3+3x^2+3x+1)+6x^3-6x^2+4=0,$$

$$4x^3+12x^2+12x+4+6x^3-6x^2+4=0,$$

$$10x^3+6x^2+12x+8=0.$$

Так как $x^3+6x^2+12x+8=(x+2)^3$, тогда уравнение равносильно

$$9x^3+(x^3+6x^2+12x+8)=0,\quad (\sqrt[3]{9}x)^3+(x+2)^3=0,$$

$$(\sqrt[3]{9}x)^3=-(x+2)^3.$$

Так как функция $f(x)=\sqrt[3]{x}$ строго монотонно возрастает на $(-\infty;+\infty)$, получим

$$\sqrt[3]{9}x=-(x+2),\quad (\sqrt[3]{9}+1)x=-2,\quad x=-\frac{2}{\sqrt[3]{9}+1}.$$

11.2. Найдите число сумм вида 2021^k+2021^m, которые делятся на 2022 (здесь показатели степени k и m – *различные* натуральные числа, не превосходящие 2021).

Ответ. $n=1021110$.

Решение. Так как число 2021 сравнимо с -1 по модулю 2022, тогда число 2021^k сравнимо со степенью $(-1)^k$ по модулю 2022 при любом $k=1,2,3,\ \ldots,2020,2021$.

Поэтому среди чисел 2021^k четные степени 2021^{2n} сравнимы с $(-1)^{2n}=+1$ по модулю 2022, а нечетные степени 2021^{2n-1} сравнимы с $(-1)^{2n-1}=-1$ по модулю 2022. Таким образом, сумма двух разных степеней будет сравнима с 0 по модулю 2022, только если степени будут иметь разную четность.

Поскольку среди набора степеней $1,2,3,\ \ldots,2020,2021$ число четных чисел равно $p=1010$, а число нечетных чисел равно $q=1011$, то искомое число сумм равно произведению

$$n=p\cdot q=1010\cdot 1011=1021110.$$

11.3. Для любых положительных чисел x_i доказать неравенство

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+\ldots+x_{2020}x_{2021}<\frac{(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{2021})^2}{4}.$$

Решение. Умножим неравенство на 4, раскроем скобки и перенесем все слагаемые в правую сторону неравенства, получим равносильное неравенство

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+\ldots+x_{2020}x_{2021}<\frac{(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{2021})^2}{4},$$

$$4x_1x_2+4x_2x_3+4x_3x_4+\ldots+4x_{2020}x_{2021}<(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{2021})^2,$$

$$4x_1x_2+4x_2x_3+4x_3x_4+\ldots+4x_{2020}x_{2021}<x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_{2021}^2+$$

$$+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4+2x_1x_5+2x_1x_6+\ldots+2x_1x_{2021}+$$

$$+2x_2x_3+2x_2x_4+2x_2x_5+2x_2x_6+\ldots+2x_2x_{2021}+$$
$$+2x_3x_4+2x_3x_5+2x_3x_6+\ldots+2x_3x_{2021}+$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+2x_{2018}x_{2019}+2x_{2018}x_{2020}+2x_{2018}x_{2021}+$$
$$+2x_{2019}x_{2020}+2x_{2019}x_{2021}+$$
$$+2x_{2020}x_{2021},$$
$$0<x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_{2021}^2-$$
$$-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4+2x_1x_5+2x_1x_6+\ldots+2x_1x_{2021}-$$
$$-2x_2x_3+2x_2x_4+2x_2x_5+2x_2x_6+\ldots+2x_2x_{2021}-$$
$$-2x_3x_4+2x_3x_5+2x_3x_6+\ldots+2x_3x_{2021}-$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-2x_{2018}x_{2019}+2x_{2018}x_{2020}+2x_{2018}x_{2021}-$$
$$-2x_{2019}x_{2020}+2x_{2019}x_{2021}-$$
$$-2x_{2020}x_{2021}=A.$$

Рассмотрим теперь правую часть неравенства, обозначим её A. Заметим, что в произведения, имеющие знак “–”, множители x_i входят только с индексами *разной* четности. Но не все такие слагаемые отрицательные!

Тогда, если в выражении A заменить знаки с “+” на “–” у всех остальных произведений, в которые входят x_i с индексами *разной* четности, то получим, что такая сумма B будет строго меньше A, поскольку все числа x_i положительные. С другой стороны, эта сумма B неотрицательна, так как

$$A>B=x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots+x_{2021}^2-$$
$$-2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4+2x_1x_5-2x_1x_6+\ldots+2x_1x_{2021}-$$
$$-2x_2x_3+2x_2x_4-2x_2x_5+2x_2x_6-\ldots-2x_2x_{2021}-$$
$$-2x_3x_4+2x_3x_5-2x_3x_6+\ldots+2x_3x_{2021}-$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-2x_{2018}x_{2019}+2x_{2018}x_{2020}-2x_{2018}x_{2021}-$$
$$-2x_{2019}x_{2020}+2x_{2019}x_{2021}-$$
$$-2x_{2020}x_{2021}=$$
$$=(x_1-x_2+x_3-x_4+x_5-x_6+\ldots-x_{2020}+x_{2021})^2\geq 0.$$

11.4. Полина написала на доске несколько *разных* многочленов n-ой степени так, что: 1) каждый многочлен имеет n различных действительных корней; 2) любые два написанных многочлена имеют ровно один общий корень; 3) для любого корня любого из многочленов число написанных многочленов, имеющих такой корень, есть величина постоянная. Какое наименьшее число многочленов могла написать на доске Полина?

Ответ. $n+1$.

Решение первое. Так как на доске написано несколько многочленов, то есть написано по крайней мере два многочлена, и так как эти два многочлена имеют только один общий корень, то число различных корней этих двух многочленов не меньше $n+(n-1)=2n-1$. Пусть, например, это такие многочлены (запишем их в виде произведений скобок первой степени):

$$p_1(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_n),$$

$$p_2(x)=(x-a_1)(x-b_1)(x-b_2)(x-b_4)\ldots(x-b_{n-1}).$$

Число многочленов должно быть наименьшим, тогда корень $x=a_1$ не будет корнем никакого другого многочлена. Тогда на доске написан третий многочлен, один корень которого совпадает с одним корнем первого многочлена, например, с корнем $x=a_2$, и другой корень которого совпадает с одним корнем второго многочлена, например, с корнем $x=b_1$, а остальные $n-2$ корня не совпадают с корнями этих многочленов, то есть число различных корней не меньше $n+(n-1)+(n-2)=3n-3$. Пусть это многочлен

$$p_3(x)=(x-a_2)(x-b_1)(x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_{n-2}).$$

Далее, на доске написан четвертый многочлен, один корень которого совпадает с одним корнем первого многочлена, например, с корнем $x=a_3$, другой корень которого совпадает с одним корнем второго многочлена, например, с корнем $x=b_2$, третий корень которого совпадает с одним корнем третьего многочлена, например, с корнем $x=c_1$, а остальные $n-3$ корня не совпадают с корнями этих многочленов, то есть число различных корней не меньше $n+(n-1)+(n-2)+(n-3)=3n-3$. Пусть это многочлен

$$p_4(x)=(x-a_3)(x-b_2)(x-c_1)(x-d_1)\ldots(x-d_{n-3}).$$

И так далее. Последним будет написан многочлен

$$p_{n+1}(x)=(x-a_n)(x-b_{n-1})(x-c_{n-2})(x-d_{n-3})\ldots(x-y_2)(x-z_1),$$

то есть число многочленов не меньше $n+1$. Видно, что эти написанные многочлены подходят, поэтому наименьшее число многочленов равно $n+1$.

При этом число различных корней у написанных таким образом друг за другом $n+1$ многочленов будет равно сумме арифметической прогрессии

$$n+(n-1)+(n-2)+(n-3)+\ldots+3+2+1=\frac{n+1}{2}\cdot n=\frac{n^2+n}{2},$$

а общее число написанных скобок у всех многочленов равно

$$2\cdot\frac{n^2+n}{2}=n\cdot(n+1),$$

где 2 – число многочленов с одним и тем же корнем, $\frac{n^2+n}{2}$ – число различных корней всех многочленов, n – степень многочлена и $n+1$ – число многочленов.

Решение второе. Пусть на доске написано несколько многочленов, так что любые два написанных многочлена имеют один общий корень и для каждого корня любого из многочленов число написанных многочленов, имеющих такой корень, есть величина постоянная, тогда эта величина не меньше числа 2. Пусть на доске написан какой-то многочлен

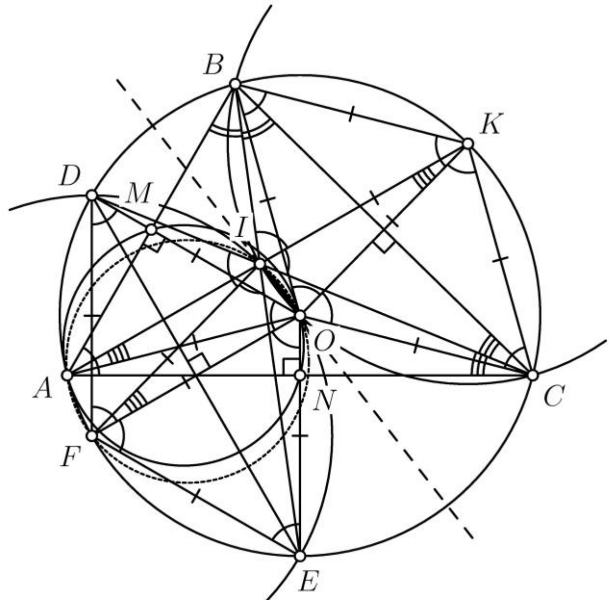
$$p_1(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_n),$$

тогда из этого следует, что на доске должны быть написаны также ещё не менее n многочленов такие, что первый из них имеет корень $x=a_1$, второй имеет корень $x=a_2$, третий имеет корень $x=a_3$, и так далее, n-ый имеет корень $x=a_n$. Поэтому число многочленов не меньше $n+1$. Теперь покажем, что Полина могла написать на доске $n+1$ таких многочленов (запишем их в виде произведений скобок первой степени):

$$p_1(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\ldots(x-a_{n-2})(x-a_{n-1})(x-a_n),$$
$$p_2(x)=(x-a_1)(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)\ldots(x-b_{n-3})(x-b_{n-2})(x-b_{n-1}),$$
$$p_3(x)=(x-a_2)(x-b_1)(x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_{n-4})(x-c_{n-3})(x-c_{n-2}),$$
$$p_4(x)=(x-a_3)(x-b_2)(x-c_1)(x-d_1)\ldots(x-d_{n-5})(x-d_{n-4})(x-d_{n-3}),$$
$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$
$$p_{n-2}(x)=(x-a_{n-3})(x-b_{n-4})(x-c_{n-5})(x-d_{n-6})\ldots(x-t_1)(x-t_2)(x-t_3),$$
$$p_{n-1}(x)=(x-a_{n-2})(x-b_{n-3})(x-c_{n-4})(x-d_{n-5})\ldots(x-t_1)(x-y_1)(x-y_2),$$
$$p_n(x)=(x-a_{n-1})(x-b_{n-2})(x-c_{n-3})(x-d_{n-4})\ldots(x-t_2)(x-y_1)(x-z_1),$$
$$p_{n+1}(x)=(x-a_n)(x-b_{n-1})(x-c_{n-2})(x-d_{n-3})\ldots(x-t_3)(x-y_2)(x-z_1).$$

11.5. Дан разносторонний остроугольный треугольник ABC. Пусть I – центр вписанной окружности, O – центр описанной окружности ω треугольника ABC. Точки B, I, O, C лежат на одной окружности Ω. Пусть D и E – середины меньших дуг AB и AC соответственно, а F – середина меньшей дуги DE окружности ω, описанной около треугольника ABC. Доказать, что точки A, I, O, F лежат на одной окружности.

Решение.



Пусть углы треугольника ΔABC равны $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$, $\angle C = 2\gamma$, тогда $\alpha+\beta+\gamma = 90^\circ$. Пусть, например, $\beta > \gamma$ (случай $\beta < \gamma$ рассматривается аналогично). Биссектриса AI угла $\angle BAC$ пересекает окружность ω в точке K – середине меньшей дуги $\overset{\smile}{BC}$ окружности ω.

Треугольник ΔBOC – равнобедренный (так как $BO - OC = R$ – радиусы окружности ω), причём $\angle BOC = \overset{\smile}{BC} = 2\angle BAC = 2\cdot 2\alpha = 4\alpha$. Пусть угол $\angle OBC = \angle BCO = \varphi$, тогда $\varphi+\varphi+4\alpha = 180^\circ$, поэтому $\varphi = 90^\circ - 2\alpha$.

Так как $\angle CBI = \beta$, $\angle BCI = \gamma$, то $\angle BIC = 180^\circ - \beta - \gamma = 90^\circ + \alpha$. Поскольку точки B, I, O, C лежат на одной окружности Ω, то равны углы $\angle BIC = \angle BOC$, то есть $90^\circ + \alpha = 4\alpha$, откуда $\alpha = 30^\circ$, и поэтому тоже $\varphi = 90^\circ - 2\alpha = 30^\circ = \alpha$.

Тогда треугольники ΔBOC и ΔBKC равны по второму признаку равенства треугольников ($\angle OBC = \angle BCO = \alpha = 30^\circ$ и $\angle BCK = \angle KBC = \frac{1}{2}\angle BOK = \frac{1}{2}\angle COK = \alpha = 30^\circ$, сторона BC – общая), поэтому $BK = KC = BO = OC = R$. При этом также $\angle OBK = \angle OCK = 2\alpha = 60^\circ$, то есть треугольники ΔBOK и ΔCOK – равносторонние, то есть $OK = BK = OB = OC = CK = R$, откуда следует, что $BOCK$ – ромб.

Следовательно, точка K является центром окружности Ω, на которой лежат точки B, I, O, C.

Рассмотрим треугольник ΔDOE, в нём $OD = OE = R$. Пусть OD пересекает AB в точке M, а OE пересекает AC в точке N, тогда M и N середины отрезков AB и AC соответственно, так как OD – биссектриса угла $\angle AOB$, OE – биссектриса угла $\angle AOC$. Поэтому также $DO \perp AB$, $OE \perp AC$.

Значит, четырёхугольник $AMON$ описанный с диаметром $AO = R$. Тогда $\angle MON = 180^\circ - \angle MAN = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, то есть $\angle DOE = \angle MON = 120^\circ$, поэтому $\angle ODE = \angle OED = 30^\circ$. Так как точка F есть середина дуги $\overset{\smile}{DE}$ окружности Ω, тогда $\angle DOF = \angle EOF = \frac{1}{2}\angle DOE = 60^\circ$. Следовательно, $\angle EDF = \frac{1}{2}\angle EOF = 30^\circ$ и $\angle DEF = \frac{1}{2}\angle DOF = 30^\circ$, тогда $\angle DOE = \angle DFE = 120^\circ$.

Значит, треугольники ΔDEF и ΔDEO также равны по второму признаку равенства треугольников ($\angle EDF = \angle EDO = 30^\circ$ и $\angle DEF = \angle DEO = 30^\circ$, сторона DE – общая), откуда $OD = OE = DF = EF = R$, то есть $DOEF$ – ромб, равный ромбу $BOCK$. Тогда окружность Ω', описанная около треугольника ΔDEO, имеет радиус, равный R, и её центром является точка F.

Заметим также, что как вертикальные равны углы $\angle DIE = \angle BIC = 90^\circ + \alpha = 120^\circ = \angle BOC = \angle DOE$, поэтому точка I также лежит на окружности Ω'. Поскольку окружности Ω и Ω' пересекаются в точках I и O, а также имеют одинаковые радиусы $KO = FO = R$, то окружности симметричны относительно прямой IO. В частности, их центры F и K симметричны относительно прямой IO, значит, $FI = KI = KO = FO = R$, поэтому $FIOK$ – ромб, откуда следует, что $\angle IKO = \angle IFO$.

С другой стороны, так как треугольник ΔAOK – равнобедренный, то $\angle OAK = \angle AKO$. Таким образом, $\angle OAI = \angle OAK = \angle AKO = \angle IKO = \angle IFO$, поэтому точки A, I, O, F также лежат на одной окружности.

Замечание. Случай, когда $\beta < \gamma$, отличается от рассмотренного только порядком букв точек. За рассмотрение только одного случая баллы не снимаются.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕРКЕ И ОЦЕНКЕ.

11.1. 1). Записана формула для куба суммы $(x+1)^3$ – *2 балла*.

2). Применена формула для $(x+2)^3$ – ещё *2 балла*.

3). Указана монотонность функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$ – ещё *2 балла*.

Любое *верное* решение неравенства оценивается в *7 баллов.*

11.2. 1). Найдено, что числа 2021^{2n} имеют остаток 1 при делении на 2022 – *2 балла*.

2). Найдено, что числа 2021^{2n-1} имеют остаток 2021 при делении на 2022 – *2 балла*.

3). Найдено число четных и число нечетных степеней 2021^k при $k = 1, 2, 3, \ldots, 2020, 2021$ – *2 балла*.

11.3. 1). Имеется идея уменьшения суммы путём замены положительных слагаемых на отрицательные – *2 балла*.

2). Имеется идея рассмотрения квадратов вида $(a-b+c)^2$, $(a-b+c-d)^2$ и аналогичных – *2 балла*.

3). Верно выписан в виде суммы квадрат $(x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \ldots - x_{2020} + x_{2021})^2$ – *3 балла*.

Любое *верное* решение неравенства оценивается в *7 баллов.*

11.4. Обоснована минимальность числа многочленов $n+1$ – *4 балла*.

Записан верный набор из $n+1$ многочленов без обоснования минимальности – *3 балла*.

11.5. Баллы суммируются за продвижения.

1). Показано, что точка K – центр окружности Ω – *1 балл*.

2). Показано, что $\angle BAC = 60^\circ$ – *1 балл*.

3). Показано, что четырёхугольник $BOCK$ – ромб – *1 балл*.

4). Показано, что четырёхугольник $DOEF$ – ромб – *1 балл*.

5). Показано, что точки D, I, O, E лежат на одной окружности Ω' – *1 балл*.

6). Показано, что четырёхугольник $FIOK$ – ромб – *2 балла*.